JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 14, 103–114 (1975)

Charakterisierung von Minimallösungen in normierten Vektorräumen durch Eigenschaften von Hyperebenen

MANFRED SOMMER

Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen-Nürnberg, Bundesrepublik Deutschland

1. EINLEITUNG

Es sei E ein normierter Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen und V eine nichtleere Teilmenge von E. Wenn für ein Element f aus E und ein Element v_0 aus V $\|f - v_0\| \leqslant \|f - v\|$ für alle v aus V gilt, so heißt v_0 Minimallösung für f bezüglich V. Zur Charakterisierung von Minimallösungen in normierten Vektorräumen werden von Brosowski [2] zwei Verallgemeinerungen des Kolmogoroffschen Kriteriums aus der Theorie der Tschebyscheff-Approximation, das globale und das lokale Kolmogoroffsche Kriterium, verwendet. Das globale Kolmogoroffsche Kriterium bildet ein stets hinreichendes Kriterium für eine Minimallösung und stellt bei der Approximation durch Elemente aus linearen Räumen [4] und aus konvexen Mengen [3] sogar eine notwendige Bedingung dar. Im allgemeinen ist es jedoch nicht notwendig. Brosowski [2] charakterisiert mit Hilfe linearer Funktionale sogenannte reguläre Mengen in normierten Vektorräumen und zeigt, daß eine Teilmenge V von E genau dann regulär ist, wenn jede Minimallösung bezüglich V dem globalen Kolmogoroffschen Kriterium genügt. Er nennt diese Mengen auch Kolmogoroff–Mengen 1. Art. Im 1. Teil dieser Arbeit werden die regulären Mengen durch Eigenschaften von Hyperebenen charakterisiert, weil uns diese Art der Charakterisierung eine anschaulichere Vorstellung über die Gestalt der regulären Mengen zu geben scheint. Wir nennen die so charakterisierten Mengen H-regulär. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, daß alle Mengen, die in gleichen Punkten H-regulär sind, eine bezüglich dieser Eigenschaft maximale Obermenge besitzen. Diese maximalen Mengen werden mit Hilfe des lokalen Kolmogoroffschen Kriteriums erzeugt.

In der Arbeit werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$P_V(f)$ ist die Menge der Minimallösungen für ein Element f bezüglich V.

$$\bar{K}_r(x) = \{y \in E: \|x - y\| \leqslant r\} \quad \text{für} \quad r > 0$$
$$K_r(x) = \{y \in E: \|x - y\| < r\} \quad \text{für} \quad r > 0$$
$$\operatorname{Rd} \bar{K}_r(x) = \bar{K}_r(x) \backslash K_r(x) \quad \text{für} \quad r > 0$$
$$\text{Für} \quad r = 0 \text{ sei } \bar{K}_0(x) = \{x\} \quad \text{und} \quad K_0(x) = \varnothing .$$

2. Charakterisierung der Kolmogoroff–Mengen 1. Art durch Eigenschaften von Hyperebenen

Wir ordnen jedem Element f aus E die Teilmenge des Dualraums E^*

$$\Sigma_f = \{L \in E^*: \| L \| \leqslant 1, L(f) = \| f \|\}$$

zu. Man nennt sie die Menge der Abweichungsfunktionale von f. Sie ist $\sigma(E^*, E)$-kompakt, konvex und nichtleer, besitzt also nach dem Satz von Krein–Milman Extremalpunkte, deren Menge wir mit E_f bezeichnen.

Nun lautet das globale Kolmogoroffsche Kriterium:

Hilfssatz 1. *Gilt für alle v aus V*

$$\min_{L \in E_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0 \textit{ mit } v_0 \textit{ aus } V,$$

so ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V.

Einen Beweis findet man bei Brosowski [1].

Da die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt, nennt man eine nichtleere Teilmenge V von E eine Kolmogoroff–Menge 1. Art, wenn jede Minimallösung bezüglich V diesem Kriterium genügt. Brosowski [2] hat die Kolmogoroff–Mengen 1. Art durch Eigenschaften linearer Funktionale charakterisiert. Da zwischen linearen Funktionalen und Hyperebenen ein enger Zusammenhang besteht, wird in dieser Arbeit eine Charakterisierung der Kolmogoroff–Mengen 1. Art durch Hyperebenen vorgenommen. Dazu benötigt man einige Voraussetzungen.

Definition 1. Es sei E ein normierter Vektorraum, x ein Element von E und r eine positive Zahl. Eine Teilmenge A von E heißt *Stützmenge* von $\bar{K}_r(x)$, wenn

$$d(A, \bar{K}_r(x)) = \inf_{\substack{v \in A \\ w \in \bar{K}_r(x)}} \| v - w \| = 0 \text{ und } A \cap K_r(x) = \varnothing$$

ist. Ist A eine Hyperebene von E, so heißt A *Stützhyperebene* von $\bar{K}_r(x)$.

Hilfssatz 2. *E, x und r seien wie oben gegeben. Für jedes L aus E^* mit* $\| L \| = 1$ *stützt die Hyperebene H in E, definiert durch,*

$$H = \{y \in E: L(x - y) = r\} = \{y \in E: L(y) = L(x) - r\} \tag{1}$$

die Kugel $\bar{K}_r(x)$ und für jede Stützhyperebene H von $\bar{K}_r(x)$ existiert eindeutig ein L aus E^* mit $\| L \| = 1$, so daß (1) *gilt.*

Der Hilfssatz wurde von Singer [4] bewiesen.

DEFINITION 2. Es sei H eine Hyperebene in E mit $H = \{y \in E\colon L(y) = a\}$. Dann liegen zwei Elemente g, h aus E auf der *gleichen Seite* von H (bzw. *echt auf der gleichen Seite* von H), wenn

$$\{g, h\} \subset \{y\colon \operatorname{Re} L(y) \geqslant \operatorname{Re} a\} \quad \text{oder} \quad \{g, h\} \subset \{y\colon \operatorname{Re} L(y) \leqslant \operatorname{Re} a\}$$

(bzw. wenn

$$\{g, h\} \subset \{y\colon \operatorname{Re} L(y) > \operatorname{Re} a\} \quad \text{oder} \quad \{g, h\} \subset \{y\colon \operatorname{Re} L(y) < \operatorname{Re} a\})$$

gilt.

Aus Hilfssatz 2 folgt sofort, daß für jedes L aus Σ_{f-v_0} die Hyperebene H, definiert durch

$$H = \{y \in E\colon L(f - y) = \|f - v_0\|\},$$

eine Stützhyperebene an $\bar{K}_{\|f-v_0\|}(f)$ mit v_0 in H ist. $\mathscr{H}_{f-v_0}$ bezeichne die Menge aller Stützhyperebenen an $\bar{K}_{\|f-v_0\|}(f)$ im Punkt v_0.

Für jedes v aus E sei außerdem $\mathscr{H}_{f,v}(v_0)$ die Menge aller Hyperebenen H in E mit v_0 in H, so daß v und f echt auf der gleichen Seite von H liegen.

Als letztes Hilfsmittel benötigen wir einen 3. Hilfssatz:

HILFSSATZ 3. *Gegeben seien f und v_0 aus E mit $f \neq v_0$ und ein reelles λ mit $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}\|f - v_0\|$. Dann gilt für jedes v aus $K_\lambda(v_0)$ und für jedes H aus $\mathscr{H}_{f-v_0}$: $H \cap (f + \{\alpha(v - f)\colon \alpha \in \mathbb{K}\})$ ist einelementig.*

Beweis. Wegen $H \in \mathscr{H}_{f-v_0}$ ist $\inf_{h \in H} \|f - h\| = \|f - v_0\|$. Für jedes $v \in K_\lambda(v_0)$ gilt außerdem:

$$\|f - (f + v_0 - v)\| = \|v_0 - v\| < \lambda \leqslant \tfrac{1}{2}\|f - v_0\|.$$

Deshalb folgt $f - v + v_0 \notin H$ und, da $v_0 \in H$ liegt,

$$\{\alpha(v - f)\colon \alpha \in \mathbb{K}\} \cap (H - v_0) = \{0\}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Nun können die Kolmogoroff-Mengen 1. Art durch Eigenschaften von Hyperebenen charakterisiert werden.

DEFINITION 3. Es sei V eine nichtleere Teilmenge von E und v_0 ein Element aus V. V heißt *H-regulär* in v_0, wenn für jedes Element f aus $E \setminus \bar{V}$, für jedes Element v aus V mit $\mathscr{H}_{f-v_0}$ enthalten in $\mathscr{H}_{f,v}(v_0)$ und für alle reellen λ mit $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}\|f - v_0\|$ ein Element v_λ aus V und ein H aus $\mathscr{H}_{f-v_0}$ existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für

$$\{v'\} = H \cap (f + \{\beta(v_\lambda - f) : \beta \in \mathbb{K}\})$$

und

$$\{v''\} = Rd\,\overline{K}_{\|f-v_0\|}(f) \cap (f + \{\alpha(v_\lambda - f) : \alpha > 0\})$$

gilt:
f und v_λ liegen echt auf der gleichen Seite von $(v'' - v') + H$.

(b) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$

V heißt *H-regulär*, wenn V in jedem Punkt H-regulär ist.

Dann lautet der Charakterisierungssatz für Kolmogoroff–Mengen 1. Art:

SATZ 1. *Es sei V eine Teilmenge von E. Dann ist V H-regulär genau dann, wenn V eine Kolmogoroff-Menge 1 Art ist.*

Der Beweis stützt sich auf folgende Hilfssätze:

HILFSSATZ 4. *Es seien f, v und v_0 Elemente von E. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

$$\min_{L \in E_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0,$$

$$\min_{L \in \Sigma_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0.$$

Einen Beweis findet man bei Brosowski [1].

HILFSSATZ 5. *Eine Teilmenge V eines normierten Raumes E sei in v_0 aus V H-regulär. Außerdem existiere für ein f aus $E \setminus \overline{V}$ ein v aus V mit $\mathscr{H}_{f-v_0}$ enthalten in $\mathscr{H}_{f,v}(v_0)$. Dann ist v_0 keine Minimallösung für f bezüglich V.*

Beweis. Wegen der Voraussetzungen existieren für alle reellen λ mit $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2} \| f - v_0 \|$ ein $v_\lambda \in V$ und ein $H \in \mathscr{H}_{f-v_0}$ mit: v_λ und f liegen echt auf der gleichen Seite von

$$(v'' - v') + H \qquad \text{und es gilt} \qquad \| v_\lambda - v_0 \| < \lambda.$$

Da $(v'' - v') + H$ eine Hyperebene ist, existieren ein $c \in \mathbb{K}$ und ein $L \in E^*$ mit

$$(v'' - v') + H = \{ y \in E\colon L(y) = c \}.$$

Deshalb ist $\operatorname{Re} L(f) > \operatorname{Re} c$ oder $\operatorname{Re} L(f) < \operatorname{Re} c$. Es genügt, den Fall $\operatorname{Re} L(f) > \operatorname{Re} c$ zu betrachten (der Beweis verläuft im anderen Fall analog). Wegen der Voraussetzungen ist damit auch $\operatorname{Re} L(v_\lambda) > \operatorname{Re} c$.

Nun ist v'' nach Definition 3 folgendermaßen gebildet:

$$v'' = f + \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|}(v_\lambda - f) = f\left(1 - \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|}\right) + \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|} v_\lambda .$$

Wegen $v' \in H$ ist $v'' \in (v'' - v') + H$ und damit $\operatorname{Re} L(v'') = \operatorname{Re} c$. Nun kann die Annahme $\|f - v_0\| \leqslant \|f - v_\lambda\|$ zum Widerspruch geführt werden. Es folgt nämlich:

$$\operatorname{Re} L(v'') > \operatorname{Re} c\left(1 - \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|}\right) + \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|} \operatorname{Re} c = \operatorname{Re} c.$$

Dies ist ein Widerspruch und deshalb gilt $\|f - v_0\| > \|f - v_\lambda\|$, also ist $v_0 \notin P_V(f)$.

Beweis von Satz 1. Zunächst sei V H-regulär in v_0 und $v_0 \in P_V(f)$ für ein $f \in E \setminus \overline{V}$. Nach Hilfssatz 5 existiert deshalb zu jedem $v \in V$ ein $H \in \mathscr{H}_{f-v_0}$ mit $H \notin \mathscr{H}_{f,v}(v_0)$, dh. es existiert eine Stützhyperebene H an $\overline{K}_{\|f-v_0\|}(f)$ in v_0, so daß f und v nicht echt auf der gleichen Seite von H liegen. Da $H \in \mathscr{H}_{f-v_0}$ ist, existiert nach Hilfssatz 2 ein $L \in \Sigma_{f-v_0}$ mit

$$H = \{y \in E: L(f - y) = \|f - v_0\|\}.$$

Also gilt für alle $w \in H$: $\operatorname{Re} L(w) = \operatorname{Re} L f) - \|f - v_0\|$. Für f und v gilt deshalb wegen $\operatorname{Re} L(f) > \operatorname{Re} L(f) - \|f - v_0\|$:

$$\operatorname{Re} L(v) \leqslant \operatorname{Re} L(f) - \|f - v_0\| = \operatorname{Re} L(v_0).$$

Daraus ergibt sich $\operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0$ für ein $L \in \Sigma_{f-v_0}$.

Nach Hilfssatz 4 existiert dann ein $L \in E_{f-v_0}$ mit $\operatorname{Re} L(v - v_0) \leqslant 0$, also ist V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art.

Nun seien ein $f \in E \setminus \overline{V}$ und ein $v_0 \in V$ gegeben. Außerdem existiere ein $v \in V$ mit $\mathscr{H}_{f-v_0} \subset \mathscr{H}_{f,v}(v_0)$. Für alle $H \in \mathscr{H}_{f-v_0}$ gilt also nach Voraussetzung, daß f und v echt auf der gleichen Seite von H liegen. Dann gilt für alle $L \in \Sigma_{f-v_0}$ $\operatorname{Re} L(v) > \operatorname{Re} L(v_0)$. Also ist $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ für alle $L \in E_{f-v_0}$. Da V nach Voraussetzung eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist, ist $v_0 \notin P_V(f)$.

Nun sei ein reelles λ mit $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}\|f - v_0\|$ beliebig gewählt. Wir konstruieren ein $v_\lambda \in V$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Es sei $\bar{v} := \lambda/(2\|f - v_0\|)(f - v_0) + v_0$. Wegen $\Sigma_{f-v_0} = \Sigma_{\bar{v}-v_0}$ ist $E_{f-v_0} = E_{\bar{v}-v_0}$ und deshalb $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$ für alle $L \in E_{\bar{v}-v_0}$. Da V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist, ist $v_0 \notin P_V(\bar{v})$. Deshalb existiert ein $v_\lambda \in V$ mit $\|\bar{v} - v_\lambda\| < \|\bar{v} - v_0\| = \lambda/2$ und

$$\|v_\lambda - v_0\| \leqslant \|v_\lambda - \bar{v}\| + \|\bar{v} - v_0\| < \lambda.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\|f - v_\lambda\| &\leqslant \|f - \bar{v}\| + \|\bar{v} - v_\lambda\| \\ &= \|(f - v_0)(1 - \lambda/(2\|f - v_0\|))\| + \|\bar{v} - v_\lambda\| \\ &< \|f - v_0\| - \lambda/2 + \lambda/2 = \|f - v_0\|.\end{aligned}$$

Nun sei $H \in \mathscr{H}_{f-v_0}$ beliebig. Man bilde v' und v'' gemäß Definition 3. Wegen $\|f - v_\lambda\| < \|f - v_0\| = \|f - v''\|$ und $v'' = f + (\|f - v_0\|/\|f - v_\lambda\|)(v_\lambda - f)$ ist $v_\lambda \in \{\alpha f + (1 - \alpha)v'': 0 < \alpha \leqslant 1\}$. Es muß noch gezeigt werden, daß f und v_λ echt auf der gleichen Seite von $(v'' - v') + H$ liegen. Da nach Voraussetzung $f \neq v_0$ und $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}\|f - v_0\|$ ist, folgt nach Hilfssatz 3:

$$H \cap (f + \{\alpha(v_\lambda - f): \alpha \in \mathbb{K}\})$$

ist einelementig.

Wegen $v', v'' \in (f + \{\alpha(v_\lambda - f): \alpha \in \mathbb{K}\})$ und $v'' \in (v'' - v') + H$ ergibt sich deshalb:

$$\begin{aligned}&((v'' - v') + H) \cap (f + \{\alpha(v_\lambda - f): \alpha \in \mathbb{K}\}) \\ &= ((v'' - v') + H) \cap (v'' - v' + f + \{\alpha(v_\lambda - f): \alpha \in \mathbb{K}\}) \\ &= \{v''\},\end{aligned}$$

also ist $\{\alpha f + (1 - \alpha)v'': 0 < \alpha \leqslant 1\} \cap ((v'' - v') + H) = \varnothing$.

Nun existieren ein $L \in E^*$ und ein $c \in \mathbb{K}$ mit

$$v'' - v' + H = \{w: L(w) = c\}.$$

Da $f \notin (v'' - v') + H$ liegt, gilt entweder $\operatorname{Re} L(f) > \operatorname{Re} c = \operatorname{Re} L(v'')$ oder $\operatorname{Re} L(f) < \operatorname{Re} c = \operatorname{Re} L(v'')$. Es genügt, den Fall $\operatorname{Re} L(f) > \operatorname{Re} c$ zu betrachten.

Wegen $v'' \in \operatorname{Rd} \bar{K}_{\|f-v_0\|}(f)$ und $\|f - v_\lambda\| < \|f - v_0\| = \|f - v''\|$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} c = \operatorname{Re} L(v'') &= \left(1 - \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|}\right) \operatorname{Re} L(f) + \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|} \operatorname{Re} L(v_\lambda) \\ &< \left(1 - \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|}\right) \operatorname{Re} c + \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|} \operatorname{Re} L(v_\lambda),\end{aligned}$$

also ist

$$\frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|} \operatorname{Re} c < \frac{\|f - v_0\|}{\|f - v_\lambda\|} \operatorname{Re} L(v_\lambda)$$

und damit

$$\operatorname{Re} c < \operatorname{Re} L(v_\lambda).$$

Also liegen f und v_λ echt auf der gleichen Seite von $v'' - v' + H$.

3. Einbettung von Kolmogoroff–Mengen 1. Art mit Hilfe des lokalen Kolmogoroffschen Kriteriums

Zur Formulierung des lokalen Kolmogoroffschen Kriteriums benötigt man folgende Menge.

Es sei E ein normierter Vektorraum und V eine Teilmenge von E. Jedem Element v_0 aus V ordnen wir die Menge der Elemente g aus E zu, für die gilt: Für jede Umgebung U von g und für alle positiven reellen ϵ existiert eine reelle Zahl η mit $0 < \eta < \epsilon$ und ein Element g' aus U mit $v_0 + \eta g'$ aus V. Diese Menge ist ein nichtleerer abgeschlossener Kegel mit dem Scheitel 0. Man nennt sie $K[v_0\,;\,V]$.

Dann lautet das lokale Kolmogoroffsche Kriterium:

Hilfssatz 1. *Ist v_0 eine Minimallösung für das Element f bezüglich V, so gilt für alle h aus $K[v_0\,;\,V]$:*

$$\min_{L \in E_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(h) \leq 0.$$

Einen Beweis findet man bei Brosowski [1].

Unter Verwendung des globalen Kolmogoroffschen Kriteriums ergibt sich sofort

Folgerung 1. *Ist v_0 Minimallösung für f bezüglich V, so ist 0 Minimallösung für $f - v_0$ bezüglich $K[v_0\,;\,V]$.*

Das lokale Kolmogoroffsche Kriterium gilt für alle Teilmengen V von E, für die v_0 eine Minimallösung für f ist. Man kann deshalb untersuchen, ob man ein V so wählen kann, daß unter der Bedingung, daß v_0 Minimallösung für f bezüglich V bleibt, die Menge $K[v_0\,;\,V]$ maximal wird. Dazu dient der nächste Hilfssatz.

Hilfssatz 2. *Es sei V eine Teilmenge eines normierten Raumes E und v_0 aus V eine Minimallösung für f bezüglich V. Außerdem sei ein $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gilt für jede Menge*

$$\tilde{V}_\epsilon := V \cup \complement_{K_\epsilon(v_0)} (K_{\|f-v_0\|}(f) \cap K_\epsilon(v_0)):$$

(a) $v_0 \in P_{\tilde{V}_\epsilon}(f)$

(b) *ist $v_0 \in P_{\hat{V}}(f)$ für eine Teilmenge $\hat{V}$ von E, so ist $K[v_0\,;\,\hat{V}] \subset K[v_0\,;\,\tilde{V}_\epsilon]$*

(c) *für $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ gilt: $K[v_0\,;\,\tilde{V}_{\epsilon_1}] = K[v_0\,;\,\tilde{V}_{\epsilon_2}]$, die Menge $K[v_0\,;\,\tilde{V}_\epsilon]$ ist also für jede Wahl von $\epsilon > 0$ gleich*

Beweis. (a) ist trivialerweise erfüllt wegen der Konstruktion von $\tilde{V}_\epsilon$.

(b) Es sei $\hat{V}$ eine Teilmenge von E mit $v_0 \in P_{\hat{V}}(f)$ und $g \in K[v_0 ; \hat{V}]$ mit $g \neq 0$.

(i) $\{v_0 + \lambda g: \lambda \geqslant 0\} \cap K_{\|f-v_0\|}(f) = \varnothing$.

Nach Folgerung 1 gilt: $0 \in P_{K[v_0;\hat{V}]}(f - v_0)$ und deshalb ist $v_0 \in P_{v_0+K[v_0;\hat{V}]}(f)$. Da $\{v_0 + \lambda g: \lambda \geqslant 0\} \subset v_0 + K[v_0 ; \hat{V}]$ ist, folgt die Behauptung.

(ii) $g \in K[v_0 ; \tilde{V}_\epsilon]$ für alle $\epsilon > 0$.

Es sei ϵ_0 mit $0 < \epsilon_0 \leqslant \min(1, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ und die Umgebung $U = K_{\epsilon_1}(g)$ gegeben, wobei $0 < \epsilon_1 \leqslant \epsilon_0$ ist. Man bilde $g' \in U$ mit

$$\begin{aligned} g' &= g + \frac{\epsilon_1}{2\|g\|} g \\ &= \frac{2\|g\| + \epsilon_1}{2\|g\|} g. \end{aligned}$$

Für

$$0 < \eta \leqslant \frac{\epsilon_1}{2\|g\| + \epsilon_1} \epsilon_1 < \epsilon_0 \leqslant \min(1, \epsilon)$$

gilt dann $\|v_0 - (v_0 + \eta g')\| \leqslant \frac{1}{2}\epsilon_1{}^2 \leqslant \frac{1}{2}\epsilon$. Also ist $v_0 + \eta g' \in K_\epsilon(v_0) \cap \{v_0 + \lambda g: \lambda \geqslant 0\}$. Wegen (i) ist

$$v_0 + \eta g' \in \complement_{K_\epsilon(v_0)} (K_{\|f-v_0\|}(f) \cap K_\epsilon(v_0))$$

und damit $v_0 + \eta g' \in \tilde{V}_\epsilon$. Wegen der Definition von $K[v_0 ; \tilde{V}_\epsilon]$ ist deshalb $g \in K[v_0 ; \tilde{V}_\epsilon]$. Da außerdem stets $0 \in K[v_0 ; \hat{V}] \cap K[v_0 ; \tilde{V}_\epsilon]$ gilt, folgt $K[v_0 ; \hat{V}] \subset K[v_0 ; \tilde{V}_\epsilon]$.

(c) Es sei $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$. Da $v_0 \in P_{\tilde{V}_{\epsilon_1}}(f) \cap P_{\tilde{V}_{\epsilon_2}}(f)$ gilt, ist nach (b) sowohl $K[v_0 ; \tilde{V}_{\epsilon_1}] \subset K[v_0 ; \tilde{V}_{\epsilon_2}]$ als auch $K[v_0 ; \tilde{V}_{\epsilon_2}] \subset K[v_0 ; \tilde{V}_{\epsilon_1}]$.

Da $K[v_0 ; \tilde{V}_\epsilon]$ für jedes $\epsilon > 0$ gleich ist, wird diese Menge ab sofort nur noch mit $K[v_0 ; \tilde{V}]$ bezeichnet.

Aus Hilfssatz 2 ergibt sich folgende Erweiterung des lokalen Kolmogoroffschen Kriteriums:

HILFSSATZ 3. *Ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V, so gilt für alle h aus $K[v_0 ; \tilde{V}]$:*

$$\min_{L \in E_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(h) \leqslant 0.$$

Als nächstes soll gezeigt werden, daß jede Kolmogoroff-Menge 1. Art V für ein beliebiges Element v_0 aus V in $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$ enthalten ist. Wie ein

Beispiel zeigen wird, ist dies für $v_0 + K[v_0 ; V]$ im allgemeinen nicht der Fall. Für diese Einbettung wählt man eine andere Charakterisierung der Kolmogoroff–Mengen 1. Art.

DEFINITION 1. v_0 heißt ein *solarer Punkt* von V, wenn für jedes Element f, für das v_0 eine Minimallösung bezüglich V ist, und für alle $\lambda > 1$ gilt: v_0 ist Minimallösung für $v_0 + \lambda(f - v_0)$ bezüglich V. Ist jeder Punkt von V solar, so heißt V eine *α-Sonne*.

SATZ 1. *Für eine Teilmenge V von E sind folgende Aussagen gleichwertig*:

(a) *V ist eine Kolmogoroff–Menge* 1. *Art*
(b) *V ist eine α-Sonne*
(c) *V ist regulär*
(d) *V ist H-regulär*

(b) $\Leftrightarrow$ (c) wurde von Brosowski [1] bewiesen.

SATZ 2. *Es sei V eine Teilmenge eines normierten Raumes E und v_0 aus V sei ein solarer Punkt von V. Ist v_0 Minimallösung für f aus E bezüglich V, so gilt*:

$$V \subset v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}].$$

Beweis. (a) Es existiere kein $f \in E \backslash V$ mit $v_0 \in P_V(f)$. Da aber dann $\{v_0\} = P_V(v_0)$ ist, bilde man wie in Hilfssatz 2 für $f = v_0$ und ein $\epsilon > 0$ $\tilde{V}_\epsilon = V \cup K_\epsilon(v_0)$. Dann gilt aber $K[v_0 ; \tilde{V}] = E$ und somit ist $V \subset v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$.

(b) Es sei $f \in E \backslash V$ mit $v_0 \in P_V(f)$. Man bilde für ein $\epsilon > 0$ $K[v_0 ; \tilde{V}]$.

Nun sei $v_1 \in V$. Da v_0 ein solarer Punkt von V ist, also nach Satz 1 das globale Kolmogoroffsche Kriterium erfüllt, gilt

$$\min_{L \in E_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v_1 - v_0) \leqslant 0. \tag{1}$$

Es sei $a := \inf_{L \in \Sigma_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v_1 - v_0)$. Wegen (1) ist $a \leqslant 0$. Da Σ_{f-v_0} $\sigma(E^*, E)$-kompakt und $\operatorname{Re} L(v_1 - v_0)$ in $L \in E^*$ $\sigma(E^*, E)$-stetig ist, ist die Menge

$$H = \{L \in \Sigma_{f-v_0} : \operatorname{Re} L(v_1 - v_0) = a\}$$

nichtleer. Sie ist außerdem konvex und $\sigma(E^*, E)$-abgeschlossen und als Teilmenge von Σ_{f-v_0} somit $\sigma(E^*, E)$-kompakt, besitzt also nach Krein–Milman Extremalpunkte. Also existiert ein Extremalpunkt L von H mit

$$\operatorname{Re} L(v_1 - v_0) = a = \inf_{L \in \Sigma_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v_1 - v_0).$$

Dieses L ist deshalb auch ein Extremalpunkt von Σ_{f-v_0}. Für dieses $L \in E_{f-v_0}$ und alle $\lambda \geqslant 0$ gilt:

$$\operatorname{Re} L(v_0 + \lambda(v_1 - v_0)) = \operatorname{Re} L(v_0) + \lambda \operatorname{Re} L(v_1 - v_0)$$
$$\leqslant \operatorname{Re} L(v_0).$$

Wegen $\operatorname{Re} L(f) = \operatorname{Re} L(v_0) + \|f - v_0\| > \operatorname{Re} L(v_0)$ liegen deshalb f und die Menge $\{v_0 + \lambda(v_1 - v_0): \lambda \geqslant 0\}$ nicht auf der gleichen Seite von der zu L gehörigen Stützhyperebene H an $\overline{K}_{\|f-v_0\|}(f)$ in v_0 mit

$$H = \{x \in E: L(f - x) = \|f - v_0\|\}.$$

Deshalb gilt: $\{v_0 + \lambda(v_1 - v_0): \lambda \geqslant 0\} \cap K_{\|f-v_0\|}(f) = \varnothing$. Nun kann der Beweis von Hilfssatz 2(b) auf das Element $g = v_1 - v_0$ angewendet werden. Daraus ergibt sich:

$$v_1 - v_0 \in K[v_0 ; \tilde{V}].$$

Unter Verwendung von Satz 1 ergibt sich:

FOLGERUNG 2. *Es sei V eine Kolmogoroff–Menge* 1. *Art in einem normierten Raum E. Ist v_0 aus V Minimallösung für f aus E bezüglich V, so gilt*:

$$V \subset v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}].$$

Satz 2 und Folgerung 2 haben gezeigt, daß sich eine Kolmogoroff–Menge 1. Art V in eine Menge der Form $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$ einbetten läßt, wobei aber $K[v_0 ; \tilde{V}]$ nach Hilfssatz 2 nur mit Hilfe von V gebildet werden kann. Nun ist es sogar möglich, zu allen Kolmogoroff–Mengen 1. Art V, die ein gemeinsames Element v_0 besitzen, welches Minimallösung für ein f aus E ist, eine gemeinsame Obermenge der Form $v_0 + K[v_0 ; \tilde{W}]$, wobei W eine beliebige Kolmogoroff–Menge 1. Art der eben beschriebenen Art ist, so zu finden, daß v_0 auch Minimallösung für f bezüglich $v_0 + K[v_0 ; \tilde{W}]$ ist.

SATZ 3. *Es sei $\mathscr{V}_{f,v_0}$ das System aller Teilmengen W eines normierten Raumes E mit v_0 aus W, v_0 ist solarer Punkt von W und f aus E besitzt v_0 als Minimallösung bezüglich W. Dann besitzt $\mathscr{V}_{f,v_0}$ das maximale Element $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$, wo V ein beliebiges Element von $\mathscr{V}_{f,v_0}$ ist, dh. für alle W aus $\mathscr{V}_{f,v_0}$ gilt*:

$$W \subset v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}].$$

Beweis. Es sei ein $V \in \mathscr{V}_{f,v_0}$ gegeben. Zunächst wird gezeigt, daß $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}] \in \mathscr{V}_{f,v_0}$ ist.

(a) Da $v_0 \in P_V(f)$ ist, gilt nach Hilfssatz 2 für jedes $\epsilon > 0$:

$$v_0 \in P_{\tilde{V}_\epsilon}(f).$$

Nach Folgerung 1 ist dann $v_0 \in P_{v_0+K[v_0;\tilde{V}]}(f)$.

(b) Es sei ein $g \in E$ mit $v_0 \in P_{v_0+K[v_0;\tilde{V}]}(g)$ gegeben. Da $K[v_0 ; \tilde{V}]$ ein Kegel mit Scheitel 0 ist, gilt für alle $\lambda > 1$:

$$\begin{aligned}
\inf_{k \in v_0+K[v_0;\tilde{V}]} \| v_0 + \lambda(g - v_0) - k \| &= \inf_{k' \in K[v_0;\tilde{V}]} \| \lambda(g - v_0) - k' \| \\
&= \lambda \inf_{k' \in K[v_0;\tilde{V}]} \left\| (g - v_0) - \frac{1}{\lambda} k' \right\| \\
&= \lambda \inf_{k'' \in K[v_0;\tilde{V}]} \| (g - v_0) - k'' \| \\
&= \lambda \inf_{k'' \in K[v_0;\tilde{V}]} \| g - (k'' + v_0) \| . \\
&= \lambda \| g - v_0 \|
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung. Also ist $v_0 \in P_{v_0+K[v_0;\tilde{V}]}(v_0 + \lambda(g - v_0))$ und damit ist v_0 ein solarer Punkt von $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$.

Nun sei ein $W \in \mathscr{V}_{f,v_0}$ gegeben.
Da v_0 ein solarer Punkt von W ist, gilt nach Satz 2:

$$W \subset v_0 + K[v_0 ; \tilde{W}].$$

Außerdem gilt für beliebiges $V \in \mathscr{V}_{f,v_0}$ und für jedes $\epsilon > 0$ nach Hilfssatz 2 wegen $v_0 \in P_{\tilde{W}_\epsilon}(f)$: $K[v_0 ; \tilde{W}] \subset K[v_0 ; \tilde{V}]$ und daraus folgt $W \subset v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$. Da nach Hilfssatz 2 wegen $v_0 \in P_{\tilde{V}_\epsilon}(f)$ auch $K[v_0 ; \tilde{V}] \subset K[v_0 ; \tilde{W}]$ folgt, ist für je zwei Elemente $V, W \in \mathscr{V}_{f,v_0}$

$$K[v_0 ; \tilde{W}] = K[v_0 : \tilde{V}].$$

Also ist das maximale Element $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$ von $\mathscr{V}_{f,v_0}$ eindeutig.

Dieses maximale Element von $\mathscr{V}_{f,v_0}$ ist für $f \neq v_0$ von E verschieden. Denn v_0 ist eine Minimallösung für f bezüglich $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$ und deshalb ist $f \notin v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$.

Satz 3 kann insbesondere auf Kolmogoroff-Mengen 1. Art angewendet werden. Dann ergibt sich:

FOLGERUNG 3. *Es sei V eine Kolmogoroff-Menge* 1. *Art. Dann existiert zu jedem v_0 aus V ein $\mathscr{V}_{f,v_0}$ und V besitzt in diesem Mengensystem ein maximales Element. Ist $f \neq v_0$, so ist diese Obermenge von E verschieden. Im allgemeinen sind diese Obermengen der Form $v_0 + K[v_0 ; \tilde{V}]$ keine Kolmogoroff-Mengen* 1. *Art.*

Ein Beispiel soll zeigen, daß es notwendig war, die Menge $K[v_0\,;\,V]$ zu $K[v_0\,;\,\tilde{V}]$ zu erweitern, um die Einbettung von Kolmogoroff–Mengen 1. Art in Mengen $v_0 + K[v_0\,;\,\tilde{V}]$ zu erhalten.

Beispiel. Es sei $E = \mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^2$ sei die Maximumsnorm $\|(x, y)\| := \max(|x|, |y|)$ gegeben. Dann gilt für die Menge $V = \{(x, y)\colon x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 = 1\}$ und die Elemente $f = (0, 0)$ aus E, $v_0 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ aus V:

$$v_0 \in P_V(f).$$

Außerdem ist $K[v_0\,;\,V] = \{(x, y)\colon x - y = 0\}$.

Da V eine α-Sonne und damit nach Satz 1 eine Kolmogoroff–Menge 1. Art ist, gilt $V \in \mathscr{V}_{f,v_0}$. Wegen $v_0 + K[v_0\,;\,V] = \{(x, y)\colon x + y = \sqrt{2}\}$ ist V keine Teilmenge von $v_0 + K[v_0\,;\,V]$. Nach Folgerung 2 ist aber V in $v_0 + K[v_0\,;\,\tilde{V}]$ enthalten.

Literatur

1. B. Brosowski, "Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen, Abstract Spaces and Approximation," ISNM, Vol. **10**, pp. 140–159, Birkhäuser-Verlag, 1969.
2. B. Brosowski, Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 369–397.
3. S. Havinson, Approximation by elements of convex sets, *Soviet Math. Dokl.* **8** (1967), 98–101.
4. I. Singer, "Best Approximation in normed linear spaces by elements of linear Subspaces," Springer, Berlin-Heidelberg, 1970.